МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«**Вятский государственный университет**»

**(ФГБОУ ВО «ВятГУ»)**

Факультет автоматики и вычислительной техники

Кафедра ЭВМ

Исследование многослойного персептрона с обучением по методу с обратным распространением ошибки

Отчёт

### Лабораторная работа № 1 по дисциплине

«Системы обработки знаний»

Выполнил студент группы ИВТб-41\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/Козюков М.Н./

## Проверил доцент кафедры ЭВМ\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/Ростовцев В.С./

Киров 2021

**Цель:** Изучить алгоритм обратного распространения ошибки в процессе обучения нейронной сети при вариативных параметрах обучения. Работа выполняется с помощью программы BackPropagate 3.0.0.exe.

**1.Задание:** Обучающая выборка представлена в приложении А. Используется выходная функция out = x1^2 + x2 – x3. Переменная х1 изменяется в промежутке [-6;6], х2 изменяется в промежутке [-5;5], х3 изменяется в промежутке [-4;4] c шагом 0.1

**2.Протокол выполнения:** Во всех таблицах ниже цветом выделен наилучший результат. Значение минимальной ошибки не учитывалось при выборе.

**2.1 Влияние нормализации на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

В таблице 1 показаны результаты исследования.

Таблица 1 – Влияние нормализации на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Тип нормализации | Результат |
| Без нормализации | Максимальная ошибка: 52.36  Минимальная ошибка: 2.36  Средняя ошибка: 29.2967226890756  Среднеквадратичная ошибка: 61430.79175 |
| [0;1] | Максимальная ошибка: 24.89366  Минимальная ошибка: 0.0485739999999986  Средняя ошибка: 9.8820945882353  Среднеквадратичная ошибка: 7704.29467567017 |
| [-0.5;0.5] | Максимальная ошибка: 20.058131  Минимальная ошибка: 0.0647439999999975  Средняя ошибка: 11.030427302521  Среднеквадратичная ошибка: 9056.36380132411 |
| [-1;1] | Максимальная ошибка: 20.098844  Минимальная ошибка: 0.393114999999998  Средняя ошибка: 11.0269743193277  Среднеквадратичная ошибка: 9048.61800554165 |

Применение нормализации [0;1] значительно сокращает величину ошибок. Результат лучше примерно в 1.5 раза для средних и, приблизительно в 1.2 для среднеквадратичных ошибок при нормализации [-1;1] (наиболее близкой к лучшей)

**2.2 Влияние выбора примеров на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

Нормализация: [0;1]

В таблице 2 показаны результаты исследования.

Таблица 2 – Влияние выбора примеров на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Выбор примеров | Результат |
| Последовательный | Максимальная ошибка: 24.97515  Минимальная ошибка: 0.038092000000007  Средняя ошибка: 9.87228811764706  Среднеквадратичная ошибка: 7700.27302269218 |
| Случайный | Максимальная ошибка: 24.949415  Минимальная ошибка: 0.0321670000000012  Средняя ошибка: 9.86368458823529  Среднеквадратичная ошибка: 7677,82298518588 |

Случайный выбор примеров показывает лучший результат по сравнению с последовательным выбором примеров обучения.

**2.3 Влияние крутизны функции на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

Нормализация: [0;1]

Выбор примеров: случайный.

В таблице 3 показаны результаты исследования.

Таблица 3 – Влияние крутизны функции на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Крутизна функции | Результат |
| 0.1 | Максимальная ошибка: 24.678528  Минимальная ошибка: 0.0005890000000015  Средняя ошибка: 9.93077734453782  Среднеквадратичная ошибка: 7729.0465900615 |
| 0.5 | Максимальная ошибка: 24.852429  Минимальная ошибка: 0.070392  Средняя ошибка: 9.87941122689075  Среднеквадратичная ошибка: 7698.88222550936 |
| 1.0 | Максимальная ошибка: 24.453969  Минимальная ошибка: 0.177352000000001  Средняя ошибка: 9.65620913445378  Среднеквадратичная ошибка: 7318.85439392757 |
| 3.0 | Максимальная ошибка: 7.021459  Минимальная ошибка: 0.003488000000008  Средняя ошибка: 3.3266034789916  Среднеквадратичная ошибка: 827.640417166601 |

Наилучшие результаты – при крутизне функции 3.0

**2.4 Влияние смещения на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

Нормализация: [0;1]

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 3.0

В таблице 4 показаны результаты исследования.

Таблица 4 – Влияние смещения на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Смещение | Результат |
| 0.1 | Максимальная ошибка: 6.894722  Минимальная ошибка: 0.0037819999999975  Средняя ошибка: 2.45744126890756  Среднеквадратичная ошибка: 476.781473667154 |
| 0.5 | Максимальная ошибка: 4.440293  Минимальная ошибка: 0.01677899999997  Средняя ошибка: 1.73392154621849  Среднеквадратичная ошибка: 230.448754690027 |
| 1.0 | Максимальная ошибка: 7.492115  Минимальная ошибка: 0.162181  Средняя ошибка: 3.578945747899916  Среднеквадратичная ошибка: 960.020197991168 |
| 2.0 | Максимальная ошибка: 39.999682  Минимальная ошибка: 2.359657  Средняя ошибка: 27.2316932016807  Среднеквадратичная ошибка: 51847.4449839177 |

Наилучшие результаты наблюдаются при смещениях 0.1 и 0.5, они отличаются незначительно. Наименьшие минимальная наблюдается при смещении 0.1, а наименьшие остальные значение при смещении 0.5

**2.5 Влияние скорости обучения на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

Нормализация: [0;1]

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 3.0

Смещение: 0.5

В таблице 5 показаны результаты исследования.

Таблица 5 – Влияние скорости обучения на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Скорость обучения | Результат |
| 0.01 | Максимальная ошибка: 24.49081  Минимальная ошибка: 0.017512  Средняя ошибка: 9.42346675630252  Среднеквадратичная ошибка: 7003.99615878594 |
| 0.1 | Максимальная ошибка: 4.748134  Минимальная ошибка: 0.11118099999998  Средняя ошибка: 1.8029305210084  Среднеквадратичная ошибка: 244.538678729929 |
| 0.5 | Максимальная ошибка: 3.096039  Минимальная ошибка: 0.00082999999998  Средняя ошибка: 0.90988868907563  Среднеквадратичная ошибка: 75.329974675812 |
| 1.0 | Максимальная ошибка: 4.556657  Минимальная ошибка: 0.024468  Средняя ошибка: 1.93223397478992  Среднеквадратичная ошибка: 321.594841833894 |

Увеличение скорости обучения во всех случаях ведет к снижению средней и среднеквадратичной ошибки. Наилучшие результаты наблюдаются при скорости 0.5

**2.6 Влияние количества нейронов в скрытом слое на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

Нормализация: [0;1]

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 3.0

Смещение: 0.5

Скорость обучения: 0.5

В таблице 6 показаны результаты исследования.

Таблица 6 – Влияние кол-ва нейронов в скрытом слое на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Количество нейронов | Результат |
| 1 | Максимальная ошибка: 4.268395  Минимальная ошибка: 0.004635000000007  Средняя ошибка: 1.02921947058824  Среднеквадратичная ошибка: 98.7380025885265 |
| 5 | Максимальная ошибка: 23.436781  Минимальная ошибка: 0.1663979999999999  Средняя ошибка: 10.1448595714286  Среднеквадратичная ошибка: 7842.23748250506 |
| 10 | Максимальная ошибка: 23.450917  Минимальная ошибка: 0.170911  Средняя ошибка: 10.145033210084  Среднеквадратичная ошибка: 7844.47676928921 |

Приоритет был отдан количеству нейронов в скрытом слое, равному 1

**2.7 Влияние момента на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3

Число выходов: 1

Циклов обучения: 200

Нормализация: [0;1]

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 3.0

Смещение: 0.5

Скорость обучения: 0.5

Количество нейронов в скрытом слое: 1

В таблице 7 показаны результаты исследования.

Таблица 7 – Влияние момента на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Момент | Результат |
| Без момента | Максимальная ошибка: 5.149049  Минимальная ошибка: 0,00532400000000016  Средняя ошибка: 1.12870502521008  Среднеквадратичная ошибка: 125/570978128149 |
| 0.1 | Максимальная ошибка: 4.31836  Минимальная ошибка: 0.0219500000000006  Средняя ошибка: 1.01229315966387  Среднеквадратичная ошибка: 98.065656825966 |
| 0.5 | Максимальная ошибка: 39.999949  Минимальная ошибка: 2.35993  Средняя ошибка: 27.2319613697479  Среднеквадратичная ошибка: 51848.3125178995 |
| 1.0 | Максимальная ошибка: 39.998016  Минимальная ошибка: 2.358104  Средняя ошибка: 27.2299239579832  Среднеквадратичная ошибка: 51841.8221539778 |

Наилучшие результаты наблюдаются при обучении с моментом 0.1

**3.0 Ручной расчет**

Для более подробного изучения алгоритма ОРО в режиме трассировки был сделан один проход (включающий прямое и обратное распространение), а затем те же самые действия были произведены вручную

|  |  |
| --- | --- |
| Инициализация весов синапсов случайным образом...  Нейрон[1][1]  w[1, 1, 1] = 0,698  w[1, 1, 2] = -0,21  w[1, 1, 3] = -0,06  Вес смещения:  w[1, 1, 4] = 1  Нейрон[1][2]  w[1, 2, 1] = 0,2  w[1, 2, 2] = 0,376  w[1, 2, 3] = 0,962  Вес смещения:  w[1, 2, 4] = 1  Нейрон[1][3]  w[1, 3, 1] = 0,34  w[1, 3, 2] = -0,542  w[1, 3, 3] = -0,672  Вес смещения:  w[1, 3, 4] = 1  Нейрон[1][4]  w[1, 4, 1] = -0,338  w[1, 4, 2] = 0,728  w[1, 4, 3] = -0,45  Вес смещения:  w[1, 4, 4] = 1  Нейрон[1][5]  w[1, 5, 1] = 0,298  w[1, 5, 2] = 0,364  w[1, 5, 3] = -0,97  Вес смещения:  w[1, 5, 4] = 1  Нейрон[2][1]  w[2, 1, 1] = 0,104  w[2, 1, 2] = -0,764  w[2, 1, 3] = -0,628  w[2, 1, 4] = -0,134  w[2, 1, 5] = 0,136  Вес смещения:  w[2, 1, 6] = 1  Выбираем допустимый образ из обучающего множества...  0,168889  0,191111  0,213333  0,168  Подаем сигнал на вход нейронной сети...  Нейрон[0][1]  Аксон = 0,168889  Нейрон[0][2]  Аксон = 0,191111  Нейрон[0][3]  Аксон = 0,213333  Прямая волна...  Нейрон[1][1]  Взвешенная сумма = 0,564951232  Аксон = 0,8448614022  Нейрон[1][2]  Взвешенная сумма = 0,810861882  Аксон = 0,9192786099  Нейрон[1][3]  Взвешенная сумма = 0,310480322  Аксон = 0,7173675348  Нейрон[1][4]  Взвешенная сумма = 0,486044476  Аксон = 0,8112470214  Нейрон[1][5]  Взвешенная сумма = 0,412960316  Аксон = 0,77536916  Нейрон[2][1]  Взвешенная сумма = -0,06822697817  Аксон = 0,4914724547 | Обратная волна - подсчет локальной ошибки нейронов...  Подсчет локальной ошибки нейронов на выходе нейронной сети...  Желаемый сигнал на выходе:  0,168  Прогнозируемый сигнал на выходе нейронной сети:  0,4914724547  Нейрон[2][1]  Локальная ошибка = 0,04042229554  Подсчет локальной ошибки нейронов в скрытых слоях нейронной сети...  Нейрон[1][1]  Локальная ошибка = 0,001653030621  Нейрон[1][2]  Локальная ошибка = -0,006874978958  Нейрон[1][3]  Локальная ошибка = -0,01544065205  Нейрон[1][4]  Локальная ошибка = -0,002488249669  Нейрон[1][5]  Локальная ошибка = 0,002872493342  Коррекция весов синапсов...  w[1, 1, 1] = 0,6980396727  w[1, 1, 2] = -0,2099768575  w[1, 1, 3] = -0,05999338763  Вес смещения:  w[1, 1, 4] = 0,9997933712  w[1, 2, 1] = 0,1998350008  w[1, 2, 2] = 0,37590375  w[1, 2, 3] = 0,9619724991  Вес смещения:  w[1, 2, 4] = 1,000859372  w[1, 3, 1] = 0,3396294251  w[1, 3, 2] = -0,5422161699  w[1, 3, 3] = -0,6720617649  Вес смещения:  w[1, 3, 4] = 1,001930082  w[1, 4, 1] = -0,3380597179  w[1, 4, 2] = 0,7279651644  w[1, 4, 3] = -0,4500099534  Вес смещения:  w[1, 4, 4] = 1,000311031  w[1, 5, 1] = 0,2980689397  w[1, 5, 2] = 0,3640402151  w[1, 5, 3] = -0,9699885096  Вес смещения:  w[1, 5, 4] = 0,9996409383  w[2, 1, 1] = 0,09267417278  w[2, 1, 2] = -0,7766794787  w[2, 1, 3] = -0,6370067096  w[2, 1, 4] = -0,1447143805  w[2, 1, 5] = 0,1259382388  Вес смещения:  w[2, 1, 6] = 0,9858521966 |

Рисунок 1 – Трассировка первого прохода

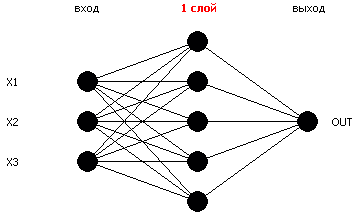


Рисунок 2 – Структура сети

В качестве активационной функции взята

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – взвешенная сумма входов i-го нейрона (с учетом смещения);

– коэффициент крутизны. Для всех слоев = 3.

Таблица 8 - Расчет прямой волны

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № слоя | № нейрона | № выхода | Входной сигнал xj | Весовой коэффициент wij | Смещение wi0 | Вес смещения | wij\*xj | Взвешенная сумма Si | Выход нейрона yi = F(Si) |
| Вход | 1 | 1 | 0,168889 | - | - | - | - | - | 0,16889 |
| 2 | 1 | 0,191111 | - | - | - | - | - | 0,191111 |
| 3 | 1 | 0,213333 | - | - | - | - | - | 0,213333 |
| 1 | 1 | 1 | 0,168889 | 0,698 | 0,5 | 1 | 0,11788522 | 0,564951232 | 0,844861402 |
| 2 | 0,191111 | -0,21 | -0,04013331 |
| 3 | 0,213333 | -0,06 | -0,01279998 |
| 2 | 1 | 0,168889 | 0,2 | 0,5 | 1 | 0,033778 | 0,810861882 | 0,91927861 |
| 2 | 0,191111 | 0,376 | 0,071857736 |
| 3 | 0,213333 | 0,962 | 0,205226346 |
| 3 | 1 | 0,168889 | 0,34 | 0,5 | 1 | 0,05742226 | 0,310480322 | 0,717367535 |
| 2 | 0,191111 | -0,542 | -0,103582162 |
| 3 | 0,213333 | -0,672 | -0,143359776 |
| 4 | 1 | 0,168889 | -0,338 | 0,5 | 1 | -0,169111 | 0,486044476 | 0,811247021 |
| 2 | 0,191111 | 0,728 | 0,139128808 |
| 3 | 0,213333 | -0,45 | 0,09599985 |
| 5 | 1 | 0,168889 | 0,298 | 0,5 | 1 | 0,050328922 | 0,412960316 | 0,775369167 |
| 2 | 0,191111 | 0,364 | 0,069564404 |
| 3 | 0,213333 | -0,97 | -0,20693301 |
| Выход | 1 | 1 | 0,8448614022 | 0,104 | 0,5 | 1 | 0,0878655858 | -0,06822697817 | 0,44900767 |
| 2 | 0,9192786099 | -0,764 | -0,702328858 |
| 3 | 0,7173675348 | -0,628 | -0,6450506812 |
| 4 | 0,8112470214 | -0,134 | -0,108707101 |
| 5 | 0,77536916 | 0,136 | 0,105450206 |

Для расчета ошибок необходимо найти производную функции (1) по :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Тогда ошибка единственного нейрона выходного слоя буден найдена как

где – фактическое значение его выхода;

– желаемый сигнал на выходе.

Ошибка i-го нейрона скрытого слоя будет найдена как

где – ошибка выходного слоя;

– синаптическая связь между i-м нейроном скрытого слоя и j-м нейроном выходного слоя.

В таблице 9 показан расчет ошибок.

Таблица 9 – Расчет ошибок

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № слоя | № нейрона | Si | F'(Si) | Ошибка |
| Выход | 1 | -0,06822697817 | 0,167981509 | 0,4042229554 |
| 1 | 1 | 0,564951232 | 0,229034139 | 0,001653030621 |
| 2 | 0,810861882 | 0,165029432 | -0,006874978958 |
| 3 | 0,310480322 | 0,248261463 | -0,01644065205 |
| 4 | 0,486044476 | 0,242092431 | -0,002488249669 |
| 5 | 0,412960316 | 0,248774315 | 0,002872493342 |

Коррекция веса синапса производится по следующей формуле:

Коррекция веса смещения производится по следующей формуле:

В таблице 10 показан расчет новых весов.

Значения в таблицах 8,9 полностью совпадают со значениями на рис. 1.

Скорректированные веса в таблице 10 совпадают с искомыми с точностью не менее трех знаков после запятой; погрешность можно объяснить ошибками округления и расчетов с плавающей запятой в разных средах.

Таким образом, ручной расчет выполнен верно.

Таблица 10 – Расчет новых весов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № слоя | № нейрона | № выхода | Предыдущий весовой коэффициент wij(t) | Предыдущий вес смещения Tj(t) | Новый весовой коэффициент wij(t+1) | Новый вес смещения Tj(t+1) |
| 1 | 1 | 1 | 0,698 | 1 | 0,697998122 | 0,998864 |
| 2 | -0,21 | -0,210001878 |
| 3 | -0,06 | -0,060001878 |
| 2 | 1 | 0,2 | 1 | 0,199976599 | 1,003404 |
| 2 | 0,376 | 0,375976599 |
| 3 | 0,962 | 0,961976599 |
| 3 | 1 | 0,34 | 1 | 0,33976599 | 1,012245 |
| 2 | -0,542 | -0,542201312 |
| 3 | -0,672 | -0,672201312 |
| 4 | 1 | -0,338 | 1 | -0,338004497 | 1,001807 |
| 2 | 0,728 | 0,727995503 |
| 3 | -0,45 | -0,450004497 |
| 5 | 1 | 0,298 | 1 | 0,297993842 | 0,997856 |
| 2 | 0,364 | 0,363993842 |
| 3 | -0,97 | -0,970006158 |
| Выход | 1 | 1 | 0,104 | 1 | 0,02165738 | 0,796294054 |
| 2 | -0,764 | -0,84634262 |
| 3 | -0,628 | -0,71034262 |
| 4 | -0,134 | -0,21634262 |
| 5 | 0,136 | 0,05365738 |

**4. Выводы**

В ходе выполнения лабораторной работы был исследован алгоритм ОРО при обучении многослойной НС, а также влияние различных параметров на качество обучения.

Наибольшее влияние на качество обучения показали нормализация, крутизна функции и величина момента. Влияние других параметров, таких как смещение, скорость обучения и кол-во нейронов в скрытом слое были значительно меньше. При этом, случайный выбор примеров улучшил результаты работы, его использование предпочтительно для избегания привыкания сети.

Оптимальные параметры, выбранные для решения данной задачи :

Число входов: 3, Число выходов: 1, Циклов обучения: 200, Нормализация: [0;1], Выбор примеров: случайный, Крутизна функции: 3.0, Смещение: 0.5, Скорость обучения: 0.5, Количество нейронов в скрытом слое: 1, Момент: 0.1.

Работа алгоритма ОРО была проверена ручным расчетом одного прохода. Вычисленные вручную значения совпали практически точно, разница с рассчитанными автоматически.

Приложение А

(обязательное)

Обучающая выборка

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | OUT |
| -6 | -5 | -4 | 35 |
| -5,9 | -4,9 | -3,9 | 33,81 |
| -5,8 | -4,8 | -3,8 | 32,64 |
| -5,7 | -4,7 | -3,7 | 31,49 |
| -5,6 | -4,6 | -3,6 | 30,36 |
| -5,5 | -4,5 | -3,5 | 29,25 |
| -5,4 | -4,4 | -3,4 | 28,16 |
| -5,3 | -4,3 | -3,3 | 27,09 |
| -5,2 | -4,2 | -3,2 | 26,04 |
| -5,1 | -4,1 | -3,1 | 25,01 |
| -5 | -4 | -3 | 24 |
| -4,9 | -3,9 | -2,9 | 23,01 |
| -4,8 | -3,8 | -2,8 | 22,04 |
| -4,7 | -3,7 | -2,7 | 21,09 |
| -4,6 | -3,6 | -2,6 | 20,16 |
| -4,5 | -3,5 | -2,5 | 19,25 |
| -4,4 | -3,4 | -2,4 | 18,36 |
| -4,3 | -3,3 | -2,3 | 17,49 |
| -4,2 | -3,2 | -2,2 | 16,64 |
| -4,1 | -3,1 | -2,1 | 15,81 |
| -4 | -3 | -2 | 15 |
| -3,9 | -2,9 | -1,9 | 14,21 |
| -3,8 | -2,8 | -1,8 | 13,44 |
| -3,7 | -2,7 | -1,7 | 12,69 |
| -3,6 | -2,6 | -1,6 | 11,96 |
| -3,5 | -2,5 | -1,5 | 11,25 |
| -3,4 | -2,4 | -1,4 | 10,56 |
| -3,3 | -2,3 | -1,3 | 9,89 |
| -3,2 | -2,2 | -1,2 | 9,24 |
| -3,1 | -2,1 | -1,1 | 8,61 |
| -3 | -2 | -1 | 8 |
| -2,9 | -1,9 | -0,9 | 7,41 |
| -2,8 | -1,8 | -0,8 | 6,84 |
| -2,7 | -1,7 | -0,7 | 6,29 |
| -2,6 | -1,6 | -0,6 | 5,76 |
| -2,5 | -1,5 | -0,5 | 5,25 |
| -2,4 | -1,4 | -0,4 | 4,76 |
| -2,3 | -1,3 | -0,3 | 4,29 |
| -2,2 | -1,2 | -0,2 | 3,84 |
| -2,1 | -1,1 | -0,1 | 3,41 |
| -2 | -1 | 0 | 3 |
| -1,9 | -0,9 | 0,1 | 2,61 |
| -1,8 | -0,8 | 0,2 | 2,24 |
| -1,7 | -0,7 | 0,3 | 1,89 |
| -1,6 | -0,6 | 0,4 | 1,56 |
| -1,5 | -0,5 | 0,5 | 1,25 |
| -1,4 | -0,4 | 0,6 | 0,96 |
| -1,3 | -0,3 | 0,7 | 0,69 |
| -1,2 | -0,2 | 0,8 | 0,44 |
| -1,1 | -0,1 | 0,9 | 0,21 |
| -1 | 0 | 1 | 0 |
| -0,9 | 0,1 | 1,1 | -0,19 |
| -0,8 | 0,2 | 1,2 | -0,36 |
| -0,7 | 0,3 | 1,3 | -0,51 |
| -0,6 | 0,4 | 1,4 | -0,64 |
| -0,5 | 0,5 | 1,5 | -0,75 |
| -0,4 | 0,6 | 1,6 | -0,84 |
| -0,3 | 0,7 | 1,7 | -0,91 |
| -0,2 | 0,8 | 1,8 | -0,96 |
| -0,1 | 0,9 | 1,9 | -0,99 |
| 0 | 1 | 2 | -1 |
| 0,1 | 1,1 | 2,1 | -0,99 |
| 0,2 | 1,2 | 2,2 | -0,96 |
| 0,3 | 1,3 | 2,3 | -0,91 |
| 0,4 | 1,4 | 2,4 | -0,84 |
| 0,5 | 1,5 | 2,5 | -0,75 |
| 0,6 | 1,6 | 2,6 | -0,64 |
| 0,7 | 1,7 | 2,7 | -0,51 |
| 0,8 | 1,8 | 2,8 | -0,36 |
| 0,9 | 1,9 | 2,9 | -0,19 |
| 1 | 2 | 3 | 0 |
| 1,1 | 2,1 | 3,1 | 0,21 |
| 1,2 | 2,2 | 3,2 | 0,44 |
| 1,3 | 2,3 | 3,3 | 0,69 |
| 1,4 | 2,4 | 3,4 | 0,96 |
| 1,5 | 2,5 | 3,5 | 1,25 |
| 1,6 | 2,6 | 3,6 | 1,56 |
| 1,7 | 2,7 | 3,7 | 1,89 |
| 1,8 | 2,8 | 3,8 | 2,24 |
| 1,9 | 2,9 | 3,9 | 2,61 |
| 2 | 3 | 4 | 3 |
| 2,1 | 3,1 | 3,9 | 3,61 |
| 2,2 | 3,2 | 3,8 | 4,24 |
| 2,3 | 3,3 | 3,7 | 4,89 |
| 2,4 | 3,4 | 3,6 | 5,56 |
| 2,5 | 3,5 | 3,5 | 6,25 |
| 2,6 | 3,6 | 3,4 | 6,96 |
| 2,7 | 3,7 | 3,3 | 7,69 |
| 2,8 | 3,8 | 3,2 | 8,44 |
| 2,9 | 3,9 | 3,1 | 9,21 |
| 3 | 4 | 3 | 10 |
| 3,1 | 4,1 | 2,9 | 10,81 |
| 3,2 | 4,2 | 2,8 | 11,64 |
| 3,3 | 4,3 | 2,7 | 12,49 |
| 3,4 | 4,4 | 2,6 | 13,36 |
| 3,5 | 4,5 | 2,5 | 14,25 |
| 3,6 | 4,6 | 2,4 | 15,16 |
| 3,7 | 4,7 | 2,3 | 16,09 |
| 3,8 | 4,8 | 2,2 | 17,04 |
| 3,9 | 4,9 | 2,1 | 18,01 |
| 4 | 5 | 2 | 19 |
| 4,1 | 4,9 | 1,9 | 19,81 |
| 4,2 | 4,8 | 1,8 | 20,64 |
| 4,3 | 4,7 | 1,7 | 21,49 |
| 4,4 | 4,6 | 1,6 | 22,36 |
| 4,5 | 4,5 | 1,5 | 23,25 |
| 4,6 | 4,4 | 1,4 | 24,16 |
| 4,7 | 4,3 | 1,3 | 25,09 |
| 4,8 | 4,2 | 1,2 | 26,04 |
| 4,9 | 4,1 | 1,1 | 27,01 |
| 5 | 4 | 1 | 28 |
| 5,1 | 3,9 | 0,9 | 29,01 |
| 5,2 | 3,8 | 0,8 | 30,04 |
| 5,3 | 3,7 | 0,7 | 31,09 |
| 5,4 | 3,6 | 0,6 | 32,16 |
| 5,5 | 3,5 | 0,5 | 33,25 |
| 5,6 | 3,4 | 0,4 | 34,36 |
| 5,7 | 3,3 | 0,3 | 35,49 |
| 5,8 | 3,2 | 0,2 | 36,64 |
| 5,9 | 3,1 | 0,1 | 37,81 |
| 6 | 3 | 0 | 39 |